Limites

- D'une suite réelle

Déf : Une suite réelle est une liste de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indicés par les entiers.

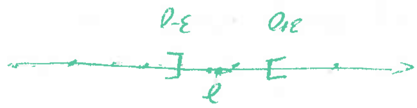
Autrement dit, elle est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$

On veut étudier le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$.
On parle donc de limite d'une suite.

Déf : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une ~~[illegible]~~ suite réelle. On dit que :

- (u_n) converge (ou tend) vers $\ell \in \mathbb{R}$ ($u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$)

si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N >> 0$ t.q. $u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ (voisinage de ℓ) $\forall n > N$
dépend de ε $\Updownarrow$ $|u_n - \ell| < \varepsilon$.



- u_n tend (ou diverge) vers $+\infty$ ($u_n \to +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$) si

$\forall M >> 0$ $\exists N >> 0$ t.q. $u_n \in]M ; +\infty[$ (voisinage de $+\infty$) $\forall n > N$
dépend de M $\Updownarrow$ $u_n > M$

- u_n tend (ou diverge) vers $-\infty$ ($u_n \to -\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$) si

$\forall M >> 0$ $\exists N >> 0$ t.q. $u_n \in]-\infty, -M[$ (voisinage de $-\infty$) $\forall n > N$.
$\Updownarrow$ $u_n < -M$.

- sinon, on dit que (u_n) est <u>divergente</u>.

Exemples : $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$; $n^2 \to +\infty$; $-\log n \to -\infty$; $(-1)^n$ est divergente.

On veut généraliser les limites aux fonctions réelles.

- Limites des fonctions réelles.

- Vers un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Définition : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage (épointé) d'un point x_0 (c'est à dire, $\exists \varepsilon > 0$ tq. $]x_0-\varepsilon ; x_0+\varepsilon[\setminus \{x_0\} \subset D_f$). On dit que :

- $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ pour x qui tend vers x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \underset{\text{dépend de } \varepsilon}{\exists \delta > 0} \text{ tq. } \ \ \underbrace{x \in]x_0-\delta ; x_0+\delta[\setminus \{x_0\}}_{\Leftrightarrow\ |x-x_0| < \delta,\ x \neq x_0} \Rightarrow \underbrace{f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[}_{\Leftrightarrow\ |f(x)-\ell| < \varepsilon}$$

- $f(x)$ tend vers $+\infty$ pour $x \to x_0$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$) si

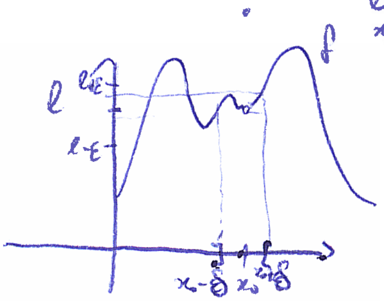
$$\forall M (>0) \ \ \underset{\text{dépend de } M}{\exists \delta > 0} \text{ tq. } \ \ \underbrace{x \in]x_0-\delta ; x_0+\delta[\setminus \{x_0\}}_{|x-x_0| < \delta,\ x \neq x_0} \Rightarrow \underbrace{f(x) \in]M ; +\infty[}_{f(x) > M.}$$

- $f(x)$ tend vers $-\infty$ pour $x \to x_0$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$) si

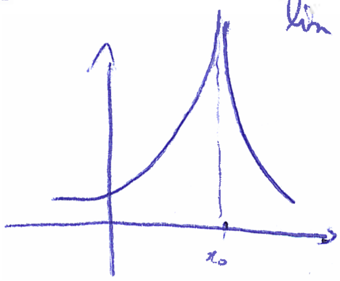
$$\forall M (>0) \ \exists \delta > 0 \text{ tq. } \ \ \underbrace{x \in]x_0-\delta ; x_0+\delta[\setminus \{x_0\}}_{\Leftrightarrow\ |x-x_0| < \delta,\ x \neq x_0.} \Rightarrow \underbrace{f(x) \in]-\infty ; -M[}_{\Leftrightarrow\ f(x) < -M.}$$

- Sinon, on dit que f ~~admet~~ n'a pas de limite en x_0 (pour $x \to x_0$) ($\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$).

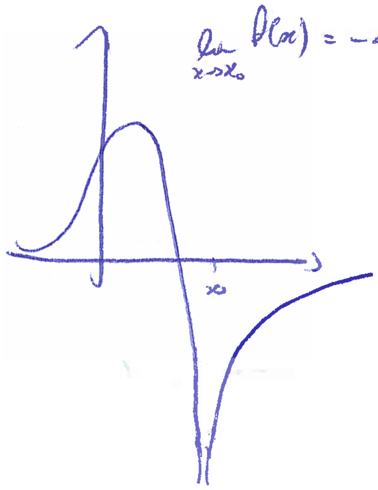
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell.$



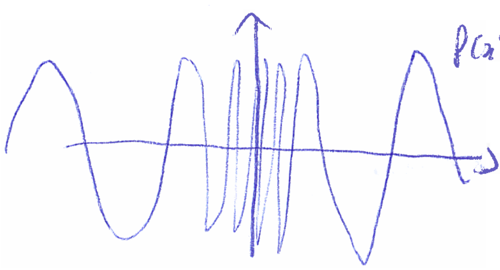
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$



$f(x) = \sin \frac{1}{x}$



$\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Exemples : - $f(x) = x$. Alors $\lim_{x \to x_0} \cancel{f}x = x_0$ ($\forall x_0 \in \mathbb{R}$)

il faut montrer que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\underset{x}{\cancel{f(x)}} - x_0| < \varepsilon$

il suffit prendre $\delta = \varepsilon$.

- $f(x) = x^2$. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$

En effet il faut trouver $\delta(\varepsilon) > 0$ tq. si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x_0^2 - x_0^2| < \varepsilon$

~~$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| |x + x_0|$~~

si $x_0 = 0$, il faut montrer $|x| < \delta \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$. Il suffit prendre $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Si $x_0 \neq 0$, on peut considérer $\delta < |x_0|$.

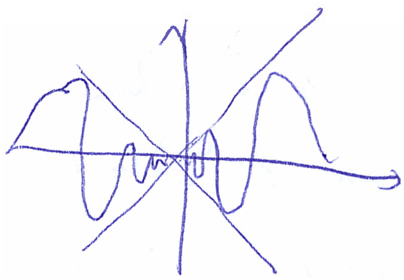
Alors $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < 2|x_0| \cdot |x - x_0|$.

Si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < 2|x_0| \delta$

$2|x_0| \delta \leq \varepsilon$ si $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|}$. il suffit prendre un tel δ.

- $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) Alors

$\lim_{x \to 0} \cancel{f} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

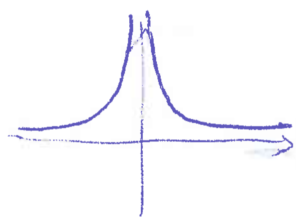


En effet, il faut montrer que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq

$|x| < \delta \Rightarrow |x \sin \frac{1}{x}| < \varepsilon$.

Mais $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$. Donc $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$

il suffit prendre $\delta = \varepsilon$.



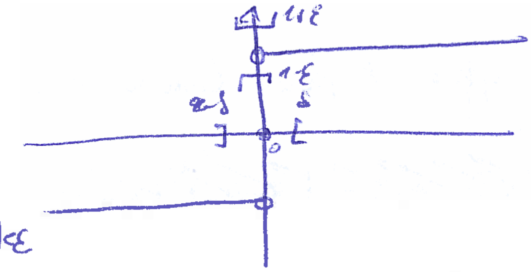
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$: Il faut montrer que $\forall M > 0\ \exists \delta > 0$ tq. $|x - 0| < \delta$, $x \neq 0$ $\Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$

Mais $\frac{1}{x^2} > M$ si et seulement si $x^2 < \frac{1}{M}$. ou $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ (je peux supposer $M > 0$)

il suffit prendre $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

- La fonction $\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ n'admet pas de limite en 0



Supposons par absurde que $\exists \lim_{x \to 0} \text{signe}(x) =: \ell$

On aurait que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.q. $|x| < \delta \Rightarrow |\text{signe}(x) - \ell| < \varepsilon$

~~Pour $\forall x > 0$ signe~~ $\forall \delta > 0, \exists x \in \{|x| < \delta\} \cap \{x > 0\}$, et $\text{sign}(x) = 1$.
" " " $\{x < 0\}$ " " $= -1$.

Donc on aurait que $\forall \varepsilon$, $|1 - \ell| < \varepsilon$ et $|-1 - \ell| < \varepsilon$.

$\Updownarrow \quad 1 - \varepsilon < \ell < 1 + \varepsilon \qquad -1 - \varepsilon < \ell < -1 + \varepsilon$

Mais pour $\varepsilon < 1$,
les deux intervalles: $]1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon[\ \cap\ ]-1 - \varepsilon; -1 + \varepsilon[\ = \emptyset$. Absurde
($\ell \in$ à cette intersection) (Avec des raisonnements analogues, on peut montrer que la limite, quand elle existe, elle est unique)

Limites à l'infini.

Déf: Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que

- $f(x)$ tend à $\ell \in \mathbb{R}$ pour $x \to +\infty$ si: $(\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N (> 0)$ t.q. $x \in]N, +\infty[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

N dépend de ε. $\quad x \in]N, +\infty[\Leftrightarrow x > N \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

- $f(x)$ tend à $+\infty$ pour $x \to +\infty$ si $(\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty)$

$\forall M (> 0)\ \exists N (> 0)$ t.q. $x \in]N, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]M, +\infty[$
$x > N \Rightarrow f(x) > M$.

- $f(x)$ tend à $-\infty$ pour $x \to +\infty$ si $(\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty)$

$\forall M (>0)$, $\exists N (>0)$ tq. $x \in]N ; +\infty[\Rightarrow f(x) \in]-\infty ; M[$

$x > N \Rightarrow f(x) < -M$.

De même façon, on peut définir les limites pour $x \to -\infty$ (par exercice)

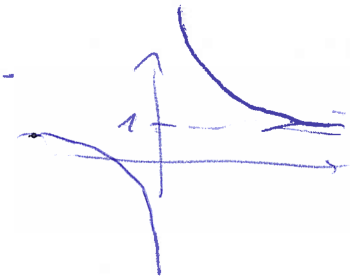
Exemples :

- $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ($D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$). $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

il faut montrer que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ tq si $x > N$ alors $|f(x) - 1| < \varepsilon$

Mais $\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$. si $x > N$ alors $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{N}$.

il suffit prendre $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$, c'est à dire $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

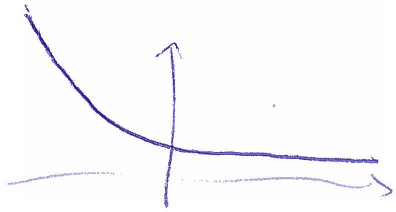


- $f(x) = e^{-x}$. Alors $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

il faut montrer que $\forall M > 0$, $\exists N > 0$ tq. si $x < -N$ alors $e^{-x} > +M$.

$e^{-x} > +M \Leftrightarrow -x > \log(+M) \Leftrightarrow x < \log(+\frac{1}{M})$.

il suffit prendre ~~$\log(+\frac{1}{M})$~~ $-N \leq \log \frac{1}{M}$, c'est à dire $N \geq \log M$.



- $f(x) = \chi_{\mathbb{N}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$ n'admet pas de limite pour $x \to +\infty$:

En effet si $\exists \ell = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, on a :

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ tq $x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

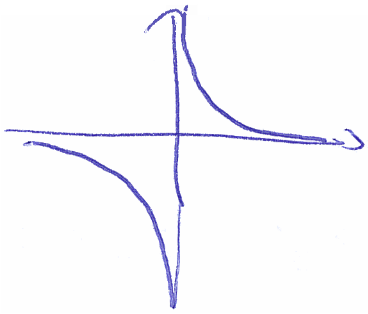
Comme $\forall N$, $\exists n \in \mathbb{N}, n > N$, on a que $\forall \varepsilon$, $|\underset{1}{f(n)} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell = 1$

Car $\forall N$ $\exists x \notin \mathbb{N}, x > N$, on a que $\forall \varepsilon$, $|\underset{0}{f(x)} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell = 0$ Absurde

Pour mieux dire, si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, alors $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ et $]-\varepsilon, \varepsilon[$ ne s'intersectent pas. Mais $l \in$ aux deux : absurde.

Limites à gauche et à droite.

- Considérons la fonction : $f(x) = \frac{1}{x}$



Cette fonction n'a pas de limite en 0. (: il faudrait avoir :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq. $|x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - l\right| < \varepsilon$.

pour $x > 0$ on a $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}$, $\frac{1}{x} - l > \frac{1}{\delta} - l$.

pour $x < 0$ " $\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta}$, $\frac{1}{x} - l < \frac{1}{\delta} - l$ ...)

Mais on voudrait dire que la limite "à droite" est $+\infty$, et "à gauche" est $-\infty$.

Définition : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage droit épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$. (c'est à dire, $\exists \delta > 0$ tq. $]x_0, x_0+\delta[\subseteq D_f$). Alors, on dit que :

- $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 à droite $\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l\right)$ si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq. $x \in]x_0, x_0+\delta[\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ $\left(\Leftrightarrow f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\right)$

$x_0 < x < x_0 + \delta$

- $f(x)$ tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers x_0 à droite $\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty\right)$ si

$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ tq. $x \in]x_0 ; x_0+\delta[\Rightarrow f(x) \in]M, +\infty[$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$x_0 < x < x_0 + \delta$ $\qquad$ $f(x) > M$.

- de façon analogue : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

De même façon, si f est définie sur un voisinage <u>gauche</u> épointé de x_0,

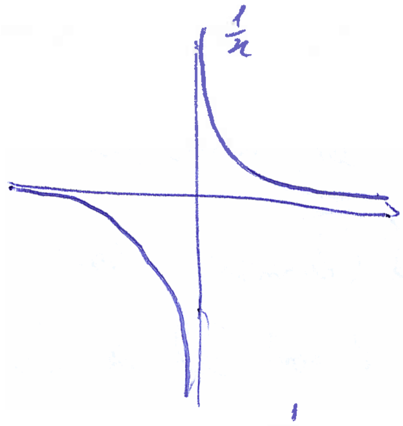
- $f(x)$ tend vers $-\infty$ pour x qui tend vers x_0 à <u>gauche</u> $\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty\right)$

si $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ tq $x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f(x) \in]-\infty, -M[$

$x_0 - \delta < x < x_0$ $\qquad$ $f(x) < -M$.

Par exercice, écrire les conditions $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

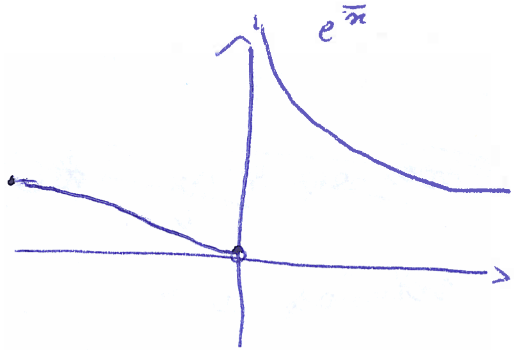
Exemple : - $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.



- $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

- $\lim_{x \to 0^+} \text{signe}(x) = +1$ $\quad$ $\text{signe}(x) = 0$

- $\lim_{x \to 0^-} \text{sign}(x) = -1$. $\quad$ $\nexists \lim_{x \to 0} \text{signe}(x)$



~~Rap si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ alors~~

~~Notations~~ :

Remarque : ~~Dans~~ toutes les définitions de limite peuvent être fondées de la façon suivante.

- Un "point généralisé" est un "point" de la forme :

- $x_0 \in \mathbb{R}$

- x_0^+, x_0^-

- $+\infty$, $-\infty$.

Un voisinage d'un "point généralisé" ω est : $\quad$ Type "fondamental" :

- un voisinage de x_0 si $\omega = x_0$	$]x_0 - \delta ; x_0 + \delta[$
- un voisinage de $+\infty$, $-\infty$ si $\omega = +\infty, -\infty$.	$]N ; +\infty[$, $]-\infty ; -N[$
- un voisinage $\frac{\text{droit}}{\text{gauche}}$ de x_0 si $\omega = x_0^+ / x_0^-$.	$[x_0 ; x_0 + \delta[$, $]x_0 - \delta ; x_0]$

Si V est un voisinage de $\omega = x_0, x_0^+, x_0^-$, alors
$V \setminus \{x_0\}$ est dit voisinage épointé de ω.

Avec ces notations, on peut reformuler comme suit.

~~So~~ Def (limites) : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, ω un "point généralisé" et supposons que f soit définie au voisinage de ω. Alors
$\lim_{x\to\omega} f(x) = \eta$ (η "point généralisé") si :

$\forall$ ~~V voisinage de η $\exists U$ voisinage épointé de η~~

$\forall V$ voisinage de η $\exists U$ voisinage épointé de ω t.q. (qui dépend de V)
$x \in U \Rightarrow f(x) \in V$.
(c'est-à-dire, $f(U) \subset V$)

~~Pour~~ Dans cette définition, on peut toujours considérer des ~~pr~~ voisinages "fondamentaux".

Pour brevité, on va utiliser ce langage (non standard), plutôt que donner trop de énoncés similaires. Chaque fois on va ~~~~ donner des preuves pour l'un seul des cas, les autres sont par exercice.

Limites de suites

La limite d'une suite peut aussi être formulée avec les "points généralisés" :
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle. On dit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \eta$ (ou $u_n \to \eta$) si
$\forall$ ~~V_∞~~ voisinage de η, $\exists U =]N, +\infty[\cap \mathbb{N}$ voisinage de $+\infty$ (dans $\mathbb{N}$) t.q.
$u_n \in V$ $\forall n > N$. ($n \in U \Rightarrow u_n \in V$).

Quels autres liens a-t-on entre les limites des fonctions et des suites?

Théorème : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, ω un point généralisé, f définie sur un voisinage épointé de ω. Alors

$\lim_{x\to\omega} f(x) = \eta \iff$ Pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ t.q. $u_n \to \omega$ ($u_n \neq \omega$ ~~pour~~ ($u_n = \omega$? seulement un nombre fini de fois) on a $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \eta$.

Preuve : $(\Rightarrow)$: Par hypothèse, (on généralise) $\forall V$ voisinage de η, $\exists U$ voisinage de ω t.q. $\divideontimes$ $f(U \setminus \{\omega\}) \subseteq V$.

Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \to \omega$ et $u_n \neq \omega$ pour $n \geq 0$.

~~Alors on a que~~ Pour tout U voisinage de ω, $\exists N > 0$ t.q. $u_n \in U$ $\forall n > N$. $\divideontimes\divideontimes$.

On peut aussi supposer $u_n \neq \omega$ pour $N > 0$.

Alors on a que ~~$\forall V$ voisinage de~~ η,

je fixe V voisinage de η et je trouve U donné par $\divideontimes$.

Par $\divideontimes\divideontimes$, $\exists N > 0$ t.q. $u_n \in U$ $\forall n > N$ et donc $f(u_n) \in V$ $\forall n > N$.

Cela est la définition de $f(u_n) \to \eta$. OK.

$(\Leftarrow)$ Supposons par absurde que $\lim_{x\to\omega} f(x) \neq \eta$.

~~C'est à dire que~~ Montrons cette implication pour $\eta = l \in \mathbb{R}$, $\omega = x_0^+$.

La négation de $\lim_{x\to\omega} f(x) = l$ est :

$\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\forall U$ voisinage épointé de ω, $\exists x \in U$ t.q. $f(x) \notin \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$.
$|f(x) - l| > \varepsilon$

U voisinage de $\omega = x_0^+$ est de la forme $]x_0, x_0+\delta[$.

Considérons $\delta = \frac{1}{n}$. $\rightsquigarrow \exists x_n$ t.q. $x_0 < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - l| > \varepsilon$.

Donc $x_n \to x_0^+$ mais $f(x_n)$ ne converge pas vers l, absurde. $\square$

Remarque. Ce théorème est très utile pour montrer que une fonction n'a pas de limite :

Corollaire. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, w point généralisé, f définie dans un voisinage de w. Si $\exists (u_n)$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = w$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \eta$ et ($u_n, u_n' \neq w$ pour $n >> 0$). $\exists (u_n')$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} u_n' = w$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n') = \eta'$.

Alors $\eta \neq \eta' \Rightarrow f$ n'admet pas de limite en w.

Exemple: $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas.

En effet $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $u_n' = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ sont tels que

$u_n \to 0^+$, $u_n' \to 0^+$, $f(u_n) = \sin(2n\pi) = 0 \ \forall n$

$f(u_n') = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \ \forall n$.

Donc $f(u_n) \to 0$, $f(u_n') \to 1$, $0 \neq 1$, f n'admet pas de limite.